Die eindeutigen Transformationen der ebenen Kurve dritter Ordnung in sich,

invarianten- und funktionentheoretisch behandelt.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

vorgelegt

von

Albert Geus

aus Lichtenfels.

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Mai 1909.

Erlangen.

K. B. Hof- und Univ.-Buchdruckerei von Junge & Sohn in Erlangen.

1909.

6

Referent: Herr Professor Dr. Max Noether.
Dekan: Herr Professor Dr. Eilhard Wiedemann.

Einleitung.

Hesse beschäftigt sich in Band 36 des Crelleschen Journals[1]) mit der Geometrie der Polepaare auf einer allgemeinen Kurve dritter Ordnung

$$f \equiv a_x^3 = 0$$

und zwar geht er aus von dem Zusammenhang[2]), in dem die drei auf $f = 0$ vorhandenen Systeme von Polepaaren zu den drei Kurven des Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ stehen, die $f = 0$ zur Hesseschen haben. Demgemäß bilden die Grundlage seiner Untersuchung die Relationen, die ein Polepaar x, X aus einem der drei Systeme in seiner Eigenschaft als konjugierte Pole in bezug auf das Polarennetz einer der drei Grundkurven verbinden, nämlich

$$\varkappa_l a_x a_X a_i + \lambda_l a_x a_X a_i = 0; \ (i = 1, 2, 3.)$$

wo $\frac{\varkappa_l}{\lambda_l}$ eine Wurzel von

$$G_1(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3 = 0.$$

ist. Gewöhnlich sieht man von diesem Zusammenhang ab und macht die Geometrie der Polepaare zu einem selbständigen Problem der Geometrie auf der Kurve, für dessen Behandlung das Abelsche Theorem in Betracht kommt. Gehört

---

[1]) Otto Hesse: „Über Kurven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Kurven in drei verschiedenen Punkten berühren" (Gesammelte Werke, Nr. 11).

[2]) cf. etwa Clebsch-Lindemann pag. 527.

dann zu einem Punkte der Kurve das elliptische Argument U, so haben die drei Punkte, welche den Punkt U in einem der drei Systeme von Polepaaren zu einem solchen ergänzen, die Argumente:

$$U + \omega_i; \ (i = 1, 2, 3.)$$

wenn ω_1, ω_2, ω_3 die halben Perioden des Integrals U bedeuten.

Der Verfasser stellte sich nun zuerst die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen beiden Definitionen herzustellen, d. h. unter Zuhilfenahme der letzten Definition die obigen Relationen für ein Polepaar zu konstruieren.

Dabei kann man zwei Wege einschlagen. Entweder man stellt die Koordinaten eines Kurvenpunktes durch elliptische Funktionen des Argumentes U dar, und sucht dann nach Relationen zwischen den Koordinaten eines Punktepaares der Argumente U, $U + \omega_i$. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, die Koordinaten durch Jacobische Funktionen zu definieren, weil dann der Hermitesche Satz [1]) unmittelbar die Existenz der Relationen einzusehen erlaubt. Oder man nimmt die Darstellung der elliptischen Funktionen, bei denen das zur Kurve gehörige Integral erster Gattung als Argument figuriert, durch Polaren von $a_x^3 = 0$ zu Hilfe und dies ist der geeignetere Weg, der rasch zum Ziele führt.

Setzt man in die Funktionen p und p' von Weierstraß als Argument das Integral

$$\int_x^{x'} \frac{(k\zeta\, d\zeta)}{a_\zeta^2 a_k}$$

ein — k ein beliebiger Punkt der Kurve —, so gelingt es eine invariante Identität zu finden, die in x, x' und k homogen und linear wird, wenn

$$\int_x^{x'} = \text{Const. ist.}$$

k ist beliebig; die Identität ist daher gleichbedeutend mit

[1]) Siehe Burkhardt: „Elliptische Funktionen"; §§ 40 und 130.

drei lineo-linearen Relationen für die Koordinaten eines Punktepaares x, x' der Zuordnung:

$$\int_x^{x'} \frac{(k\zeta\, d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} = C.$$

Ist xx' ein Polepaar, C also eine halbe Periode ω_i, so resultieren die bekannten Beziehungen.

Diese Relationen gestatten aber weiter, überhaupt die automorphen Transformationen der allgemeinen Kurve dritter Ordnung in invariant-algebraischer Form zu behandeln, was, soviel dem Verfasser bekannt ist, bis heute noch nicht geschehen ist [1]). Nach Harnack ist die Gruppe der eindeutigen algebraischen Transformationen der allgemeinen C_3 in sich damit erschöpft, daß einem Punkte des Argumentes U der Punkt $U' \equiv \pm U + C$ (mod. Per.) zugeordnet wird. Dem Vorzeichen minus entsprechen die Transformationen „erster Art", dem Zeichen plus solche „zweiter Art". Es ist eine sehr bekannte Eigenschaft, daß man jede eindeutige Transformation der Kurve in sich als durch eine quadratische Cremonasche Verwandtschaft in der Ebene hervorgerufen ansehen kann. Es handelt sich hier um die Darstellung dieser Transformationen, das ist um die Herstellung der den eingangs genannten lineo-linearen Relationen entsprechenden Relationen.

Die analytische Formulierung der Transformationen „erster Art" gestaltet sich einfacher; ihre wesentliche Eigenschaft, zwei Punkte, die auf einem Strahle durch einen festen Punkt der Kurve liegen, ineinander überzuführen, gestattet ohne weiteres spezielle analytische Ansätze, welche hier zu einem allgemeinen analytischen Ausdruck zusammengefaßt werden.

Zum Schlusse spricht der Verfasser an dieser Stelle noch Herrn Universitätsprofessor Dr. Max Noether seinen wärmsten Dank aus sowohl für die Anregung zur vorliegenden Arbeit, als auch für die wohlwollende Unterstützung während ihrer Ausführung.

[1]) Bezüglich der einschlägigen Literatur siehe Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. III. 2. pag. 498—500.

I. Teil.

Algebraisches über die Polepaare.

§ 1.

Kegelschnitte, welche die Hessesche Kurve der C_3 an drei Stellen berühren[1]).

Hesse geht aus von einem Paar in bezug auf das Polarennetz der Grundkurve $f \equiv a_x^3 = 0$ konjugierter Pole p, P, deren Koordinaten x_i und X_i das Gleichungssystem:

$$a_x a_X a_i = 0; \; (i = 1, 2, 3.) \tag{1.}$$

verbindet. Diese Gleichungen sind bekannt als die Bedingungen dafür, daß der Polarkegelschnitt des Punktes x, nämlich $a_x a_y^2 = 0$ im Punkte X einen Doppelpunkt habe. Die Gleichungen (1.) sind symmetrisch hinsichtlich x_i oder X_i, die Elimination der Größen x_i oder X_i führt deshalb beide Male zur Hesseschen Determinante, welche sowohl der Ort der Doppelpunkte der ersten Polaren ist, als auch der Ort der Pole, deren Polarkegelschnitte hinsichtlich $f = 0$ zerfallen. (Zusammenfallen der Hesseschen und Steinerschen Kurve bei der C_3.) (C.-L. pag. 527.)[2])

Man sieht gewöhnlich von der Bedeutung der Punktepaare x, X für das Polarennetz der Grundkurve ab und macht ihre Geometrie zu einem Problem der Geometrie auf der Hesseschen Kurve. In diesem Falle spricht man von einem Polepaare der Hesseschen Kurve.

---

[1]) Vgl. im folgenden den oben genannten Aufsatz von Hesse, Crelles Journal Bd. 36.

[2]) Unter C.-L. werden die „Vorlesungen über Geometrie“ von A. Clebsch, bearbeitet von Dr. F. Lindemann, zitiert.

Um das Gleichungssystem (1.) nach X aufzulösen, schreiben wir es in der Form:

$$X_1 f_{1i} + X_2 f_{2i} + X_3 f_{3i} = 0. \ (i = 1, 2, 3); \ f_{ik} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k};$$

und bezeichnen die Unterdeterminanten von

$$H \equiv \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ . \ . \ . \\ . \ . \ f_{33} \end{vmatrix}$$

mit a_{ik}; da nun die Determinante H verschwindet, so verhält sich:

$$X_1 : X_2 : X_3 = a_{i1} : a_{i2} : a_{i3}; \ (i = 1, 2, 3.)$$

Hieraus kann man, da $a_{ik} = a_{ki}$, die fortlaufende Proportion ableiten:

$$X_1^2 : X_1 X_2 : . \ . \ . \ . : X_3^2 = a_{11} : a_{12} : . \ . \ . : a_{33}.$$

Es ist gestattet, hier die x_i mit den X_i zu vertauschen. Aus diesen Verhältnissen folgert Hesse den Satz:

„Jeden sechs Punkten P der Kurve $H = 0$, durch welche sich ein Kegelschnitt legen läßt, entsprechen sechs Punkte p, welche auf der Kurve und zugleich auf einem anderen Kegelschnitte liegen."

Artet der Kegelschnitt der Punkte P in ein Linienpaar aus

$$u_X \cdot v_X = \Sigma u_i v_k X_i X_k = 0,$$

so hat der Kegelschnitt der Punkte p die Gleichung:

$$\Sigma u_i v_k a_{ik} = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich in Form einer Determinante schreiben, wenn man die Bedeutung der a_{ik} berücksichtigt. Es wird[1]):

$$\Sigma u_i v_k a_{ik} = - \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} u_1 \\ . \ . \ . \ u_2 \\ . \ . \ f_{33} u_3 \\ v_1 \ v_2 \ v_3 \ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (abu)(abv) a_x b_x = 0.$$

Es ist der Ort der Punkte x, für deren Polarkegelschnitte der Pol der Geraden u immer auf v liegt. Wird insbesondere

[1]) C.-L. pag. 543.

der Kegelschnitt der Punkte P eine doppelte Gerade $u_X^2 = 0$, so berührt der Kegelschnitt der Punkte p,

$$(2.) \qquad \Sigma u_i u_k X_i X_k = \frac{1}{2}(abu)^2 a_x b_x = 0,$$

$H = 0$ an drei Stellen. $(abu)^2 a_x b_x$ ist die unter dem Symbol Θ bekannte Zwischenform; für konstantes u und variables x stellt $\Theta = 0$ „die Polokonik der Geraden u“ dar[1]).

§ 2.

Relationen für die Polokonik.

Bezeichnen wir die Polokonik $\Theta = 0$ symbolisch durch

$$\Theta_x^2 u_\vartheta^2 \equiv \Theta_x'^2 u_{\vartheta'}^2 \equiv \ldots$$

und betrachten die Invariante derselben

$$(\Theta\Theta'\Theta'')^2 u_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 u_{\vartheta''}^2.$$

Gleich Null gesetzt, ist dies der Ort, den die Geraden umhüllen, deren Polokonik zerfällt. Diese Bildung soll im Interesse des Folgenden auf Formen des Systems der ternären kubischen Form

$$f \equiv a_x^3 \equiv b_x^3 \equiv \ldots$$

zurückgeführt werden. Hierzu ist es allerdings erforderlich, einige Formeln aus der Theorie dieser Form, die der Nachschrift einer Vorlesung von Herrn Professor Gordan entnommen sind, in einer Tabelle zusammenzustellen.

Tabelle.[2])

$$(a\Theta u)^2 a_x u_\vartheta^2 = \frac{1}{3} u_x u_s^3;$$

$$\Theta'_\vartheta (\Theta\Theta' u)\Theta_x u_\vartheta u_{\vartheta'}^2 \equiv 0;$$

$$\Theta_\vartheta'^2 \Theta_x^2 u_{\vartheta'}^2 = \frac{S}{6} u_x^2; \quad \Theta'_\vartheta \Theta_{\vartheta'} \Theta'_x \Theta_x u_{\vartheta'} u_\vartheta = \frac{S}{4} u_x^2 - a_s u_s^2 a_x^2.$$

---

[1]) C.-L. pag. 543; siehe auch Schroeter: „Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung“ § 24.

[2]) Symbolik wie bei C.-L.

Wir betrachten zunächst:

$$(\Theta\Theta' v)^2 u_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 = u_{\vartheta'}^2 \{(\Theta\Theta' u) v_\vartheta + \Theta'_\vartheta (\Theta uv)\}^2$$
$$= (\Theta\Theta' u)^2 v_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 + 2\,\Theta'_\vartheta (\Theta\Theta' u)(\Theta uv)\, v_\vartheta u_{\vartheta'}^2 +$$
$$+ \Theta'^2_\vartheta (\Theta uv)^2 u_{\vartheta'}^2$$
$$= I + 2\cdot II + III.$$

Setzen wir

$$v_i v_k = \Theta''_i \Theta''_k u_{\vartheta''}^2,$$

so wird

$$III = I = (\Theta\Theta' u)^2 \Theta''^2_\vartheta u_{\vartheta'}^2 u_{\vartheta''}^2 = \frac{S}{6} (uu\Theta')^2 \equiv 0. \text{ (Tabelle.)}$$

Glied II dagegen ist ein Teil der ersten Polare von $(x_i = (uv)_i)$

$$\Theta'_\vartheta (\Theta\Theta' u)\, \Theta_x u_\vartheta u_{\vartheta'}^2 \equiv 0.$$

Die Polaren dieser Form verschwinden ebenfalls identisch; es ist:

$$0 \equiv \Theta'_\vartheta (\Theta\Theta' u) v_\vartheta u_{\vartheta'}^2 \Theta_x + \Theta'_\vartheta (\Theta\Theta' v) u_\vartheta u_{\vartheta'}^2 \Theta_x +$$
$$2\,\Theta'_\vartheta (\Theta\Theta' u) u_\vartheta v_{\vartheta'} u_{\vartheta'} \Theta_x;$$

oder, wenn wir die Teile der Polare abkürzend mit G_1, G_2, G_3 bezeichnen, wird:

$$G_1 + G_2 + 2\,G_3 = 0;$$
$$G_1 - G_2 = 0; \text{ (Tabelle.)}$$
$$G_1 - G_3 = -\Theta'_\vartheta \Theta_{\vartheta'} u_\vartheta u_{\vartheta'} \Theta_x (\Theta' uv); \text{ für } x_i = (uv)_i$$
$$= a_s (a uv)^2 u_s^2; \text{ für } v_i v_k = \Theta''_i \Theta''_k u_{\vartheta''}^2$$
$$= a_s (a\Theta'' u)^2 u_s^2 u_{\vartheta''}^2 = \frac{1}{3} \Sigma^2;$$

also endlich:

$$(1.) \qquad (\Theta\Theta'\Theta'')^2 u_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 u_{\vartheta''}^2 = 2\,II = 2\,G_2 = \frac{1}{3} \Sigma^2;$$

d. h. die Geraden, deren Polokonik zerfällt, umhüllen die Cayleysche Kurve.

Endlich stellen wir hier noch eine Relation auf, die analytisch veranschaulicht, daß das Schnittpunktsystem eines Kegelschnittes $\Theta_x^2 u_\vartheta^2 = 0$ mit der Hesseschen Kurve $\Delta = 0$ ein

vollständiges Quadrat ist. Die Kegelschnitte $\Theta_x^2 u_\vartheta^2 = 0$ und $\Theta_x^2 v_\vartheta^2 = 0$ berühren $\Delta = 0$ in den Polen der Schnittpunkte von $u_x = 0$ und $v_x = 0$. Andererseits geht durch diese Pole ein weiterer Kegelschnitt, nämlich $\Theta_x^2 u_\vartheta v_\vartheta = 0$. Es besteht also eine Relation der folgenden Art:

$$\Theta_x^2 u_\vartheta^2 \cdot \Theta_x'^2 v_{\vartheta'}^2 = \Theta_x^2 u_\vartheta v_\vartheta \cdot \Theta_x'^2 u_{\vartheta'} v_{\vartheta'} + C \cdot L \cdot \Delta.$$

C bedeutet einen Zahlenfaktor; L kann nur

$$(auv)^2 a_x$$

sein; also

$$\Theta_x^2 u_\vartheta^2 \cdot \Theta_x'^2 v_{\vartheta'}^2 = \Theta_x^2 u_\vartheta v_\vartheta \, \Theta_x'^2 u_{\vartheta'} v_{\vartheta'} + C(auv)^2 a_x \cdot \Delta.$$

Es ist nun einerseits:

$$\Theta_x^2 \Theta_x'^2 \cdot (\vartheta\vartheta' \overset{\wedge}{uv})^2 = \Theta_x^2 \Theta_x'^2 u_\vartheta^2 v_{\vartheta'}^2 + \Theta_x^2 \Theta_x'^2 u_{\vartheta'}^2 v_\vartheta^2 - 2 \cdot \Theta_x^2 \Theta_x'^2 u_\vartheta v_\vartheta u_{\vartheta'} v_{\vartheta'}.$$

Andererseits:

$$\Theta_x^2 \Theta_x'^2 (\vartheta\vartheta' y)^2 = (\overset{\wedge}{ab} \overset{\wedge}{cd} y)^2 a_x b_x c_x d_x = \frac{4}{3} \Delta a_x a_y^2.$$

Setzen wir hier für y_i wieder $(uv)_i$, so erhalten wir durch Vergleichung die gesuchte Relation:

$$\Theta_x^2 u_\vartheta^2 \, \Theta_x'^2 v_{\vartheta'}^2 = \Theta_x^2 u_\vartheta v_\vartheta \, \Theta_x'^2 u_{\vartheta'} v_{\vartheta'} + \frac{2}{3} \Delta (auv)^2 a_x. \tag{2.}$$

Die linke Seite ist vermöge $\Delta = 0$ ein vollständiges Quadrat, d. h. $\Theta_x^2 u_\vartheta^2 = 0$ und $\Theta_x^2 v_\vartheta^2 = 0$ berühren $\Delta = 0$ in den sechs Schnittpunkten von $\Theta_x^2 u_\vartheta v_\vartheta = 0$.

§ 3.

Die drei Systeme von Polepaaren auf $f \equiv a_x^3 = 0$.

Zu jeder Kurve des syzygetischen Büschels $\varkappa f + \lambda \Delta = 0$ gehört eine andere Kurve desselben Büschels als deren Hessesche, nämlich

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1 \Delta - G_2 f = 0.$$

und anderseits kann man jede Büschelkurve als Hessesche von drei anderen Büschelkurven betrachten. So liefert z. B.

$$G_1(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3 - \frac{S}{2} \varkappa \lambda^2 - \frac{T}{3} \lambda^3 = 0$$

drei Werte des Verhältnisses $\frac{\varkappa}{\lambda}$, deren zugehörige Kurven, $f = 0$ zur Hesseschen haben. Wir nennen sie die zu $f = 0$ gehörigen Grundkurven. Der Zusammenhang derselben mit den drei auf $f = 0$ vorhandenen Systemen von Polepaaren ist bekannt. (C.-L. p. 527.) Irgendein Polepaar x, X aus einem der drei Systeme bildet ein Paar konjugierter Pole in bezug auf das Polarennetz der entsprechenden Grundkurve, und ist als solches durch das Gleichungssystem verbunden:

$$\varkappa_i a_x a_X a_l + \lambda_i a_x a_X a_l = 0; \ (l = 1, 2, 3.)$$

wobei $a_x^3 = 0$ und $a_X^3 = 0$; $\frac{\varkappa_i}{\lambda_i}$ ist eine Wurzel der Gleichung $G_1 = 0$. Von den drei Systemen von Polepaaren auf $\Delta = a_x^3 = 0$ ist eines ausgezeichnet, nämlich das zur Grundkurve $f = 0$ gehörige, das wir schon betrachtet haben (§ 1). Ein Polepaar x, X aus diesem Systeme verbindet das Gleichungssystem (1.) § 1:

$$a_x a_X a_i = 0; \ i = 1, 2, 3. \ (a_x^3 = 0; \ a_X^3 = 0).$$

Für das Folgende wird es nützlich sein, wenn wir diese Relationen zwischen den Polepaaren noch etwas anders formulieren. An Stelle der drei Gleichungen:

$$-\frac{\varkappa_i}{\lambda_i} = \frac{a_x a_X a_l}{a_x a_X a_l}; \ l = 1, 2, 3.$$

können wir die einzige schreiben:

$$(2.) \qquad -\frac{\varkappa_i}{\lambda_i} = \frac{a_x a_X a_z}{a_x a_X a_z};$$

wo z ein ganz beliebiger Punkt ist. Wir werden in § 5 im Zusammenhang mit allgemeineren Untersuchungen die Aufgabe erledigen, diese algebraische Relation zwischen den Koordinaten eines Polepaares mit Hilfe der elliptischen Funktionen aufzustellen.

II. Teil.

Aufstellung von Relationen zwischen den Koordinaten eines Punktepaares der Argumente U, U + C.

§ 4.

Nachweis der Existenz der Relationen.

Zunächst sollen hier noch einige die Aufgabe des § 5 vorbereitende Bemerkungen Platz finden. Sind die Koordinaten der Punkte einer allgemeinen C_3 durch elliptische Funktionen eines Parameters U definiert, dann sind die Argumente der $3n$ Schnittpunkte der C_3 mit einer beliebigen anderen Kurve $n$ter Ordnung durch die Relation verbunden:

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_{3n} \quad n \cdot U_0.$$

Weiter sind die Argumente der drei Punkte, welche einen Punkt U in einem drei Systeme von Polepaaren zu einem solchen ergänzen:

$$U + \omega_1;\ U + \omega_1 + \omega_3 = U + \omega_2;\ U + \omega_3\ ^1).$$

Diese Definition ist ein Ausdruck dafür, daß sich die Tangenten der Kurve in den Punkten eines Polepaares U, V (wieder) in einem Punkte der Kurve treffen; denn dies führt sofort zur Bedingung:

$$2V \equiv 2U;$$

und hieraus:

$$V \equiv U + p\omega_1 + q\omega_3.$$

Soll dann ein Kegelschnitt die C_3 in drei Punkten berühren, so haben wir:

$$2(U_1 + U_2 + U_3) \equiv 2U_0; \text{ also}$$
$$U_1 + U_2 + U_3 \equiv U_0 + p\omega_1 + q\omega_3.$$

---

[1]) ω_1; $\omega_1 + \omega_3 = \omega_2$; ω_3 sind die halben Perioden des Integrals erster Gattung, wenn $2\omega_1$, $2\omega_3$ ein primitives Periodenpaar ist.

Schließen wir den trivialen Fall $p = 0$; $q = 0$ aus, so sind die drei Systeme von Berührungskegelschnitten gegeben durch die Relationen:

$$U_1 + U_2 + U_3 \equiv U_0 + \omega_i; \; i = 1, 2, 3.$$

Die drei Pole, welche den Schnittpunkten einer Geraden

$$V_1 + V_2 + V_3 \equiv U_0$$

in einem Systeme z. B. im ersten entsprechen, haben nun die Argumente

$$V_1 + \omega_1; \; V_2 + \omega_1; \; V_3 + \omega_1$$

und ihre Summe ist kongruent zu $U_0 + \omega_1$; daher der Satz: „Die drei Pole, welche in einem der drei Systeme von Polepaaren zu den Schnittpunkten einer Geraden gehören, sind die Berührungspunkte eines Kegelschnittes.“ In diesem Sinne gehören zu jeder Geraden drei Berührungskegelschnitte.

Bei der im folgenden gegebenen analytischen Darstellung erscheinen die Polepaare mit den Steinerschen Punktepaaren als Spezialfall einer allgemeinen Zuordnung zweier Punkte U, U' auf der Kurve vermittels der Relation:

$$U' - U \equiv C.$$

Dabei ist C irgendein Wert, den das Argument im Periodenparallelogramm annehmen kann. Die Systeme von Berührungskegelschnitten, die wir eben betrachtet haben, ordnen sich dann allgemeineren Systemen unter, bei denen ein Kegelschnitt durch die sechs Punkte

$$V_1 \pm C; \; V_2 \pm C; \; V_3 \pm C$$

hindurchgeht, wo V_1, V_2, V_3 als Schnittpunkte einer Geraden durch die Relation verbunden sind:

$$V_1 + V_2 + V_3 \equiv U_0.$$

Hält man hier C fest, so gehört zu jeder Geraden $\sum_1^3 V_i \equiv U_0$ ein Kegelschnitt; den Geraden der Ebene entsprechen also ∞^2 Kegelschnitte eines Systems. Zu jedem Wert von C gehört ein solches Kegelschnittsystem; der Spezialfall $C = \omega_i$ liefert die 3quadratischen Scharen der Berührungskegelschnitte.

Mit diesen Kegelschnittsystemen beschäftigt sich eingehender § 7 der Arbeit, wo insbesondere die Frage nach

dem Zerfallen der Kegelschnitte in den einzelnen Systemen analytisch behandelt wird.

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen bilden Relationen der Art (1.) § 3 zwischen den Koordinaten eines Punktepaares mit den Argumenten U, $U+C$. Die Existenz solcher Relationen läßt sich leicht nachweisen, wenn wir die Koordinaten eines Punktes x der C_3 durch drei linear voneinander unabhängige Jacobische Funktionen dritter Ordnung $T_i(U)$ definieren [1]):

$$\varrho x_i = T_i(U). \tag{1.}$$

Es entspricht dann dem Punkte mit den Koordinaten $\varrho x_i = T_i(U)$, der Punkt mit den Koordinaten $\varrho X_i = T_i(U+C)$. Betrachten wir nun die neun Jacobischen Funktionen

$$T_i(U+C)\cdot T_k(U);\ (i,k=1,2,3).$$

Diese Funktionsprodukte sind offenbar gleichändrig; wählen wir sechs davon aus, um die Symmetrie zu wahren, die folgenden:

$$T_i(U+C)T_k(U);\ (i\neq k).$$

Diese sechs Funktionen sind linear voneinander unabhängig, es lassen sich also nach dem Hermiteschen Satze die drei übrigen

$$T_i(U+C)T_i(U)$$

linear durch sie ausdrücken. Zwischen den neun Funktionen bestehen somit drei Identitäten, mit anderen Worten, es bestehen zwischen den neun Größen $X_i x_k$ drei lineare Gleichungen, die nur solange eine Bedeutung haben, als X, x der durch (1.) dargestellten C_3 angehören.

§ 5.

Die Relationen.

Will man nun diese Relationen wirklich ermitteln, so ist zunächst darauf zu achten, daß bei der Einführung der elliptischen Funktionen in die Theorie der C_3 der Zusammenhang mit der ternären Algebra nicht verloren geht. Wir stellen

[1]) Vgl. Burkhardt „Elliptische Funktionen“ §§ 40, 130.

daher die elliptischen Funktionen, in denen das zur Kurve $f = 0$ gehörige Integral I. Gattung

$$U = \int_x^y \frac{(k\zeta\, d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}$$

als Argument figuriert, durch Polaren von $f = 0$ dar, wie es Herr G. Pick [1]) getan hat. Nach ihm ist [2]):

$$(1.) \qquad p\left(\int_x^y \frac{(k\zeta\, d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right) =$$

$$= \frac{(a_k a_x a_y)^2 + 2(a_k a_x^2)\cdot(a_k a_y^2) - (a_k^2 a_x)\cdot(a_x a_y^2) - (a_k^2 a_y)\cdot(a_y a_x^2)}{3(kxy)^2}.$$

$$(2.) \qquad p'\left(\int_x^y \frac{(k\zeta\, d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right) =$$

$$= \frac{-2(a_k a_x a_y)(a_k a_x^2)(a_k a_y^2) + (a_k^2 a_x)(a_k a_y^2)(a_x^2 a_y) + (a_k^2 a_y)(a_k a_x^2)(a_y^2 a_x)}{(kxy)^3}$$

$$- a_k^3 \cdot (a_x^2 a_y)\cdot(a_y^2 a_x).$$

Das Glied mit a_k^3 fällt fort, da wir annehmen wollen, daß der Hilfspunkt k ebenfalls auf der C_3 liegt, wie dies mit x und y der Fall ist. Wir knüpfen jetzt an eine Formel an, die Halphen in seinem „Traité des fonctions elliptiques“ [3]) gegeben hat:

$$(3.) \qquad 6\cdot(kxy)^2 a_x a_y a_k =$$

$$= 2[kxy]\left\{[kxy]^2 - [k^2x]\cdot[xy^2] - [k^2y][yx^2] - [kx^2][ky^2]\right\} +$$

$$+ 3[kx^2]\cdot[xy^2]\cdot[yk^2] + 3[xk^2]\cdot[yx^2]\cdot[ky^2].$$

Hierbei ist in leicht verständlicher Abkürzung:

$$[k^2x] = a_k^2 a_x;\ [kxy] = a_k a_x a_y \text{ u. s. w.}$$

---

[1]) Georg Pick: „Zur Theorie der elliptischen Funktionen“. Math. Ann. Bd. 28 p. 309.

[2]) Die Schreibweise weicht von der in der Symbolik üblichen etwas ab, kann aber zu keinem Mißverständnis führen.

[3]) G. H. Halphen: Traité des fonctions elliptiques. 2e Partie. Chap. XI. Les courbes du premier genre. La cubique plane.

Die Relation (3.) entsteht auf folgende Weise: Man multipliziere

$$a_x^3 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \end{vmatrix}$$

zweimal nacheinander mit (kxy); es wird:

$$(4.) \qquad (kxy)^2 a_x^3 = \begin{vmatrix} f\,[yx^2]\,[kx^2] \\ [yx^2]\,[xy^2]\,[xyk] \\ [kx^2]\,[xyk]\,[xk^2] \end{vmatrix}$$

Die Determinante wird entwickelt und unter der Berücksichtigung, daß $f(x) = f(y) = f(k) = 0$ ist, nach y und k differentiiert.

Fügen wir in (3.) rechts $\pm\, 6\,[kxy]\cdot[kx^2]\cdot[ky^2]$ hinzu, so können wir (3.) unter Berücksichtigung der Formeln für p und p' folgendermaßen schreiben:

$$(5.) \quad 2\,\frac{a_x a_y a_k}{(kxy)} = 2\cdot\frac{a_x a_y a_k}{(kxy)}\cdot p\left(\int_x^y \frac{(k\zeta\, d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right) + p'\left(\int_x^y \frac{(k\zeta\, d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right).$$

Diese Formel liefert die gesuchten Relationen. Als nächste Anwendung soll daraus die Relation (2.) § 3 für ein Polepaar x, X der C_3 abgeleitet werden; vorher ist aber noch folgendes zu beachten. Es ist[1]):

$$(6.) \qquad p\left(\int_x^y \frac{(k\zeta\, d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right) = \frac{a_x^2 a_y}{a_x^2 a_y},$$

wovon man sich leicht auf folgende Weise überzeugen kann. Polarisiert man (4.) nach y, so kommt links $3\,(kxy)^2\cdot a_x^2 a_y$, während rechts — immer unter der Voraussetzung, daß $f(x) = f(y) = f(k) = 0$ ist — $a_x^2 a_y$ als Faktor erscheint, so daß man unmittelbar einsieht, daß $\frac{a_x^2 a_y}{a_x^2 a_y}$ mit der linken Seite von (1.) identisch ist. Um nun (6.) nach $U = \int_x^y$ differentiieren zu

[1]) Halphen: „Functions elliptiques" t. II p. 435.

können, ist es nötig, eine Hilfsformel herzuleiten. Führt man in das elliptische Differential

$$dU = \frac{(cxdx)}{a_x^2 a_c}$$

$c_i = (\psi\varphi)_i \psi_x^{n-1} \varphi_x^{n-1}$ ein, wobei

$$(\psi\varphi\hat{x}dx)\,\psi_x^{n-1}\varphi_x^{n-1} = (\psi_x\varphi_{dx} - \psi_{dx}\varphi_x)\psi_x^{n-1}\varphi_x^{n-1} = \frac{1}{n}(\psi d\varphi - \varphi d\psi)$$

gesetzt wird, so hat man [1]):

$$dU = \frac{1}{n}\frac{\psi d\varphi - \varphi d\psi}{(a\psi\varphi)a_x^2\psi_x^{n-1}\varphi_x^{n-1}};$$

also

$$\frac{d}{dU}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = n\cdot\frac{(f\psi\varphi)}{\psi^2}.$$

Differentiiert man also (6.) nach $U = \int_x^y$, wobei die untere Grenze x als fest, während die obere y variabel gedacht ist, so wird:

$$(7.) \qquad p'\left(\int_x^y\right) = \frac{(baa)b_y^2 a_x^2 a_x^2}{(b_x^2 b_y)^2} = \frac{a_n a_y^2}{[a_x^2 a_y]^2}\ ^{2});$$

wo $u_n = (aau)a_x^2 a_x^2 = 0$ der Tangentialpunkt von x ist.

Setzen wir nun in Formel (5.) an Stelle von x, y ein Polepaar x, X aus einem der drei Systeme auf $f = 0$, so ist zunächst:

$$p'\left(\int_x^X\right) = \frac{a_n a_X^2}{[a_x^2 a_X]^2} = 0;\ \text{weil } a_n a_X^2 = 0;$$

denn X hat den nämlichen Tangentialpunkt wie x. Es wird also aus (5.)

$$(8.) \qquad p\left(\int_x^X \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right) = \frac{a_x a_X a_k}{a_x a_X a_k};$$

---

[1]) Halphen p. 427.

[2]) Halphen: „Fonctions elliptiques" t. II p. 435.

wo k ein ganz beliebiger Punkt von $f = 0$ ist. Vgl. hiezu Formel (2.) § 3.

Wir stellen jetzt für die Hessesche von $f = 0$, nämlich

$$a_x^3 = 0$$

die gleiche Betrachtung an. Das zur Kurve gehörige elliptische Differential ist

$$\frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}.$$

Die Hessesche Kovariante von Δ ergibt sich aus $\Delta_{\varkappa,\lambda}$, für $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$:

$$\Delta_{0,1} = -\frac{T}{3} a_x^3 + \frac{S^2}{12} a_x^3.$$

Das Analogon von (8.) ist daher:

$$(9.) \qquad p\left(\int_x^X \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right) =$$

$$= \frac{-\frac{T}{3} a_x a_X a_k + \frac{1}{12} S^2 \cdot a_x a_X a_k}{a_x a_X a_k} = -\frac{1}{3} T + \frac{1}{12} S^2 \frac{a_x a_X a_k}{a_x a_X a_k}.$$

Wenn nun $p\left(\int_x^X \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right) = -\frac{1}{3} T$, was voraussichtlich der Fall ist, wenn x, X ein Polepaar des zur Grundkurve $f = 0$ gehörigen Systems ist, dann folgt sofort:

$$a_x a_X a_k = 0,$$

oder, da k ein willkürlicher Punkt von $\Delta = 0$ ist:

$$a_x a_X a_i = 0; \ (i = 1, 2, 3.)$$

wo $a_x^3 = a_X^3 = 0$ ist, wie es sein muß.

Um den Nachweis der Identität von (8.) mit Formel (2.) § 3 zu vervollständigen, erübrigt es noch, zu zeigen, daß

$$p\left(\int_x^X \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right) = p.$$

wirklich eine Wurzel von

$$G_1(p, -1) = p^3 - \frac{S}{2} p + \frac{T}{3} = 0$$

ist. An Stelle von (8.) betrachtet man das gleichwertige System:

$$p a_x a_X a_i - a_x a_X a_i = 0; \ (i = 1, 2, 3).$$

Sollen diese drei Gleichungen für ein Wertesystem X_1, X_2, X_3 bestehen, so muß die Determinante der Koeffizienten, welche vom dritten Grade in x ist, verschwinden für $a_x^3 = a_X^3 = 0$. Die Determinante ergibt sich als:

$$\frac{1}{6}\Big\{ p^3 (abc)^2 a_x b_x c_x - 3p^2 (abc)^2 a_x b_x a_x + 3p\,(aa\beta)^2 a_x a_x \beta_x - (a\beta\gamma)^2 a_x \beta_x \gamma_x \Big\}.$$

Nun ist (C.-L. pag. 558):

$$(abc)^2 a_x b_x c_x = \Delta;$$

$$(aba)^2 a_x b_x a_x = \frac{1}{6} Sf; \tag{10.}$$

$$(aa\beta)^2 a_x a_x \beta_x = \frac{1}{3} Tf - \frac{1}{6} S\Delta;$$

$$(a\beta\gamma)^2 a_x \beta_x \gamma_x = \frac{1}{12} S^2 f - \frac{1}{3} T\Delta.$$

Nimmt man diese Relationen zu Hilfe und berücksichtigt die Bedingung $a_x^3 = 0$, so reduziert sich die Determinante auf:

$$\frac{1}{6}\Delta \Big\{ p^3 - \frac{S}{2} p + \frac{T}{3} \Big\}.$$

Damit die Determinante verschwindet, ist, da $\Delta \neq 0$, anzunehmen, daß p eine Wurzel von $G_1(p, -1) = 0$ ist.

Wir machen nun die nämliche Betrachtung für Gleichung (9.), an deren Stelle wir die drei Gleichungen

$$p \cdot a_x a_X a_i - \mathfrak{a}_x \mathfrak{a}_X \mathfrak{a}_i = 0; \ (i = 1, 2, 3.)$$

benützen, wo das Symbol $\mathfrak{a}_x^3$ die Hessesche Kovariante von Δ, nämlich Δ_{01} bedeutet und $p\left(\int_x^X \frac{(k\zeta d\zeta)}{a_k a_\zeta^2} \right) = p$. Die Gleichungen haben nur Gültigkeit, solange x und X Punkte von $\Delta = 0$

sind. Die Determinante in p wird unter Berücksichtigung von $A = a_{\varrho}^{\varrho} = 0$ gleich:

$$\frac{1}{6} a_{\varrho}^{\sigma} \Big\{ p^3 - \frac{1}{2} S_{01} p + \frac{1}{3} T_{01} \Big\}.$$

Die Invarianten von A, S_{01} und T_{01} erhält man aus $S_{\varkappa,\lambda}$, $T_{\varkappa,\lambda}$ für $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$ als [1])

$$S_{01} = \frac{2}{3} T^2 - \frac{1}{12} S^3; \quad T_{01} = \frac{1}{3} T \cdot \Big(- \frac{2}{9} T^2 - \frac{1}{8} S^3 \Big).$$

Setzt man diese Werte für S_{01}, T_{01} in dem obigen Ausdruck ein, so läßt sich derselbe leicht zerlegen in:

$$\frac{1}{6} a_{\varrho}^{\sigma} \Big\{ p - \frac{T}{3} \Big\} \Big\{ p^2 + \frac{T}{3} p - \frac{1}{8} \Big(- \frac{2}{9} T^2 + \frac{1}{8} S^3 \Big) \Big\}.$$

Soll die Determinante verschwinden, so muß p eine Wurzel von

$$p^3 - \frac{1}{2} S_{01} p + \frac{1}{3} T_{01} = 0$$

sein. Die Wurzel $p = -\frac{T}{3}$ ist in bekannter Weise ausgezeichnet. —

Wir wenden uns jetzt wieder zur Relation (5.) und wollen hier y durch x' ersetzen:

$$\frac{1}{2} p' \Big(\overset{x'}{\underset{x}{|}} \Big) = \frac{a_x a_{x'} a_k - p \Big(\overset{x'}{\underset{x}{|}} \Big) a_x a_{x'} a_k}{(x x' k)}. \tag{11.}$$

Hier ist die linke Seite von k unabhängig; also wird auch die rechte Seite von k unabhängig sein. Bei der Herleitung war k ein Punkt der φ_y, aber sonst ganz willkürlich. Wir dürfen, so lange kein Ausdruck von der dritten Ordnung in k auftritt, uns auch von der ersteren Beschränkung freimachen

[1]) $S_{01} = A_0 p$ bei

und k als ganz beliebigen Punkt der Ebene ansehen. Soll nun die rechte Seite von k unabhängig sein, so muß

$$a_x a_{x'} a_k - p\left(\int_x^{x'}\right) \cdot a_x a_{x'} a_k = 0$$

bei variabelem k die Verbindungslinie der Kurvenpunkte x, x' darstellen. Das ist nun in der Tat der Fall. Denn es ist vermöge der Salmonschen Identität:

$$3\,(a_x a_{x'}^2 \cdot a_x^2 a_{x'} - a_x^2 a_{x'} \cdot a_x a_{x'}^2) = a_{x'}^3 \cdot a_x^3 - a_{x'}^3 \cdot a_x^3 \equiv 0,$$

weil $a_x^3 = 0$; $a_{x'}^3 = 0$;

also:

$$p\left(\int_x^{x'} \frac{(k\,\zeta\,d\,\zeta)}{a_k a_\zeta^2}\right) = \frac{a_x^2 a_{x'}}{a_x^2 a_{x'}} = \frac{a_{x'}^2 a_x}{a_{x'}^2 a_x}.$$

Es verschwindet daher:

$$a_x a_{x'} a_k \cdot a_x^2 a_{x'} - a_x^2 a_{x'} \cdot a_x a_{x'} a_k = 0$$

zufolge der Identität für $k = x'$ identisch und

$$a_x a_{x'} a_k \cdot a_x a_{x'}^2 - a_x a_{x'}^2 \cdot a_x a_{x'} a_k = 0$$

identisch für $k = x$. Es ist also:

$$a_x a_{x'} a_k - p\left(\int_x^{x'}\right) a_x a_{x'} a_k = 0$$

die Verbindungslinie von x, x'. Zähler und Nenner der rechten Seite von (11.) unterscheiden sich daher nur um einen von k unabhängigen Faktor, nämlich um den Ausdruck auf der linken Seite, d. h.

$$\frac{1}{2}\,p'\left(\int_x^{x'}\right) = \frac{a_x a_{x'} a_i - p\left(\int_x^{x'}\right) a_x a_{x'} a_i}{(x\,x')_i} : \quad (i = 1.\ 2.\ 3.)$$

oder

$$p\left(\int_x^{x'}\right) a_x a_{x'} a_i - a_x a_{x'} a_i + \frac{1}{2}\,p'\left(\int_x^{x'}\right)(x\,x')_i = 0: \quad (i = 1.\ 2.\ 3.)$$

Kommt dem Punkte x das Argument U, und dem Punkte x' das Argument $U+C$ zu, so ist $\int_x^{x'} = C$, also:

$$p\left(\int_x^{x'}\right) = p(C) \text{ und } p'\left(\int_x^{x'}\right) = p'(C)$$

von x und x' ganz unabhängig. Wir haben also drei Gleichungen, die in x und x' linear und homogen sind:

$$(12.) \qquad p(C)\,a_x a_{x'} a_i - a_x a_{x'} a_i + \frac{1}{2}\,p'(C)(xx')_i = 0;\ (i = 1,2,3.)$$

Diese Relationen sind unter der Voraussetzung gewonnen, daß x und x' der C_3 angehören. Sollen dieselben für ein Wertesystem von x' bestehen, so muß also die Determinante der Koeffizienten, die vom dritten Grade in x ist, infolge der Bedingung $a_x^3 = 0$ verschwinden. Die Determinante ergibt sich direkt als:

$$\frac{1}{6}\Big\{p^3(C)(abc)^2 a_x b_x c_x - 3\,p^2(C)(ab\,a)^2 a_x b_x a_x + 3\,p(C)(a\alpha\beta)^2 a_x a_x \beta_x - (\alpha\beta\gamma)^2 a_x \beta_x \gamma_x\Big\} + \frac{1}{4}\,p'^2(C)\Big\{p(C)\,a_x^3 - \alpha_x^3\Big\}.$$

Nehmen wir die Relationen (10.) zu Hilfe und berücksichtigen die Bedingung $f = a_x^3 = 0$, so wird aus der Determinante:

$$a_x^3\,\frac{1}{6}\Big\{p^3(C) - \frac{S}{2}\,p(C) + \frac{T}{3}\Big\} - \frac{1}{4}\,p'^2(C)\,a_x^3,$$

und dieser Ausdruck verschwindet identisch, wenn wir definieren:

$$(13.) \qquad p'^2(C) = \frac{2}{3}\Big\{p^3(C) - \frac{S}{2}\,p(C) + \frac{T}{3}\Big\}.$$

Zur Prüfung der Richtigkeit dieser Definition ziehe man die Ausführungen bei Clebsch-Lindemann pag. 773 ff. heran, wo das elliptische Differential

$$\frac{(c\zeta\,d\zeta)}{a_c\,a_\zeta^2}$$

direkt auf die Normalform von Weierstraß gebracht wird. Dies geschieht dort für den Fall, daß c ein Wendepunkt der C_3 ist. Die hier nötig werdende Erweiterung für den Fall, daß c ein beliebiger Punkt von f ist, bietet keine Schwierigkeit.

Ist x dieser beliebige Punkt von $f = 0$, so sind die vier Tangenten, die von seinem Tangentialpunkte

$$u_n = (aau)a_x^2 a_x^2 = 0$$

ausgehen, gegeben durch

$$3[a_n a_y^2]^2 - 4f(y)a_n^2 a_y = 0,$$

und es besteht vermöge $f(y) = 0$ die Gleichung: (siehe C.-L. p. 774 Fußnote.)

$$M \cdot 3[a_n a_y^2]^2 = a_x^2 a_y G_1(a_x^2 a_y, -a_x^2 a_y);$$

die linke wie die rechte Seite hat acht Symbole der Grundform und ist von der achten Ordnung in x; daher ist M ein Zahlenfaktor.

Für die Berechnung von M beachte man, daß die vorausgehende Gleichung auch noch vermöge

$$a_n^2 a_y = 0$$

besteht, was bekannten Verhältnissen entspricht. (C.-L. p. 628.) Ein bekannter Punkt dieser Tangente ist der Punkt K: $u_k = 0$ (C.-L. p. 643), für den also die obige Gleichung erfüllt ist.

Setzen wir in derselben k_i für y_i, so sind folgende Terme zu berechnen:

$$\left.\begin{aligned} a_x^2 a_k &= \frac{1}{4}\Gamma_1 + \psi \cdot f = \frac{1}{4}\Delta^3; \ (\text{mod. } f) \\ a_x^2 a_k &= \frac{1}{4}\Gamma_2 + \psi\,\Delta = \psi \cdot \Delta; \ (\text{mod. } f) \end{aligned}\right\} \text{C.-L. p. 641 (44).}$$

modulo f soll bedeuten: unter der Voraussetzung, daß $f \equiv a_x^3 = 0$ ist.

$$a_n a_k^2 = \frac{1}{2}\,\Omega\,\Delta^3 \ (\text{mod. } f)\ ^1).$$

[1]) Zur Berechnung von $a_n a_k^2$ kann man die typische Darstellung für die Grundform $f(y)$ benutzen. (C.-L. p. 645, Fußnote). Näheres in der Dissertation von Franz Thalreiter (München 1905) pag. 51 ff.

Die rechte Seite der obigen Gleichung wird daher für $y = k$:

$$a_x^2 a_k \cdot G_1(a_x^2 \alpha_k, -a_x^2 a_k) = \frac{\Delta^3}{4}\left\{\psi^3 \Delta^3 - \frac{S}{2}\psi\Delta\left(\frac{\Delta^3}{4}\right)^2 + \frac{T}{3}\left(\frac{\Delta^3}{4}\right)^3\right\}$$

$$= \frac{\Delta^6}{4}\left\{\psi^3 - \frac{1}{32} S\psi\Delta^4 + \frac{1}{192} T\Delta^6\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\Delta^6 \cdot \frac{3}{2}\Omega^2 \,(\text{mod. } f);$$

denn es ist:

$$24^2\Omega^2 = 384\left\{\psi^3 - \frac{1}{32} S\psi\Delta^4 + \frac{1}{192} T\Delta^6\right\} \,(\text{mod. } f).$$

C.-L. pag. 640 (42).

Die linke Seite wird:

$$M \cdot 3\,[a_n a_k^2]^2 = M \cdot 3 \cdot \frac{1}{4}\,\Omega^2\Delta^6.$$

Durch Vergleichung der beiden Seiten ergibt sich:

$$M = \frac{1}{2}.$$

Für die Berechnung des Zählers im Differential

$$\frac{(nydy)}{a_n a_y^2}$$

beachte man, daß

$$n_i = (a\alpha)_i a_x^2 \alpha_x^2,$$

also wird:

$$(nydy) = (a\alpha\hat{y}dy)a_x^2\alpha_x^2 = a_y a_x^2 \cdot \alpha_{dy}\alpha_x^2 - a_{dy}a_x^2 \cdot a_y\alpha_x^2$$

$$= \lambda d\varkappa - \varkappa d\lambda,$$

wenn $\varkappa = a_x^2 a_y$, $\lambda = a_x^2 a_y$;

also endlich:

$$\frac{(nydy)}{a_n a_y^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\lambda d\varkappa - \varkappa d\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot (\varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \frac{T}{3}\lambda^3)}}.$$

Ist endlich $\frac{\varkappa}{\lambda} = \mu$, also $d\mu = \frac{\lambda d\varkappa - \varkappa d\lambda}{\lambda^2}$; so wird

$$\frac{(nydy)}{a_n a_y^2} = \frac{d\mu}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(\mu^3 - \frac{S}{2}\mu + \frac{T}{3}\right)}}.$$

Integriert man von x, als unterer Grenze, bis zu einer oberen Grenze y, so kommt:

$$\int_x^y \frac{(n\,y\,dy)}{a_n a_y^2} = \int_\infty^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(\mu^3 - \frac{S}{2}\mu + \frac{T}{3}\right)}} = U.$$

Hieraus folgt durch Umkehrung

$$p(U) = \mu;$$

und
$$p'^2(U) = \frac{2}{3}\left(p^3(U) - \frac{S}{2}p(U) + \frac{T}{3}\right); \qquad (14.)$$

wobei dann:

$$p\left(\int_x^y \frac{(n\,y\,dy)}{a_n a_y^2}\right) = p(U) = \mu = \frac{a_x^2 a_y}{a_x^2 a_y}.$$

Die hier direkt berechnete Relation (14.) stimmt mit der Definiton (13.) überein und bestätigt die Richtigkeit derselben.

III. Teil.

Anwendungen.

§ 6.

Die Transformationen „zweiter Art".

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Auflösung des Gleichungssystems (12.) § 5 nach den Größen x_i. Bezeichnen wir die Unterdeterminanten der Determinante in x_i mit α_{ik}, so verhält sich:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \alpha_{i3}; \ (i = 1, 2, 3.)$$

wo i der Index der Horizontalreihe ist. Oder:

$$\sigma_i(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = \alpha_{i1} u_1 + \alpha_{i2} u_2 + \alpha_{i3} u_3.$$

Die wirkliche Durchführung dieser Rechnung ergibt:

$$\sigma_i u_x = \frac{1}{2}\left\{ p^2 a_{x'} b_{x'} (abu)(ab)_i - 2p a_{x'} \alpha_{x'} (a\alpha u)(a\alpha)_i + \alpha_{x'} \beta_{x'} (\alpha\beta u)(\alpha\beta)_i \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} p'^2 u_{x'} x_i' - \frac{1}{2} p' \left\{ p(au)_i a_{x'}^2 - (au)_i \alpha_{x'}^2 \right\}. \ (i = 1, 2, 3.)$$

Indem man die drei Ausdrücke der Reihe nach mit v_i multipliziert und addiert, und für $\Sigma v_i \sigma_i$ wieder σ' schreibt, wird:

$$\sigma' u_x = \frac{1}{2}\left\{ p^2 (abu)(abv) a_{x'} b_{x'} - 2p(a\alpha u)(a\alpha v) a_{x'} \alpha_{x'} + (\alpha\beta u)(\alpha\beta v) \alpha_{x'} \beta_{x'} \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} p'^2 u_{x'} v_{x'} - \frac{1}{2} p' \left\{ p(auv) a_{x'}^2 - (auv) \alpha_{x'}^2 \right\}.$$

Führt man hier endlich die bekannten Symbole Θ, H, K ein, so wird:

$$(1.) \qquad \sigma' u_x = \frac{1}{2}\left\{ p^2 (C) \Theta_{x'}^2 u_\eta v_\eta - 2p(C) H_{x'}^2 u_\eta v_\eta + K_{x'}^2 u_\varkappa v_\varkappa \right\}$$

$$+ \frac{1}{4} p'^2 (C) u_{x'} v_{x'} - \frac{1}{2} p'(C) \left\{ p(C)(auv) a_{x'}^2 - (auv) \alpha_{x'}^2 \right\}.$$

Diese Formel vermittelt den algebraischen Ausdruck für die Transformation, welche den Punkt x der C_3 mit dem Argument U, in den Punkt x' derselben mit dem Argument $U + C$ überführt. Dabei besteht die Relation:

$$p'^2(C) = \frac{2}{3}\left\{p^3(C) - \frac{S}{2}p(C) + \frac{T}{3}\right\}.$$

Die v_i sind ganz willkürliche Größen, die man als Linienkoordinaten deuten kann. Aus (12.) § 5 erhellt die Tatsache, daß die C_3 durch die Transformation (1.) in sich übergeführt wird. Die rechte Seite von (1.) gleich Null gesetzt, gibt die Gleichung des Kegelschnittes, der vermöge der Transformation der Geraden $u_x = 0$ entspricht. Bezeichnet man die Argumente der Schnittpunkte von $u_x = 0$ mit der C_3 durch

$$U_1,\ U_2,\ U_3,$$

so schneidet der Kegelschnitt die C_3 zunächst in den Punkten

$$U_1 + C;\ U_2 + C;\ U_3 + C.$$

Will man die drei weiteren Schnittpunkte ermitteln, so ist zu beachten, daß die rechte Seite von (1.) symmetrisch gebaut ist, bis auf das letzte Glied; es ist:

$$-\frac{1}{2}p'(C)\left\{p(C)(auv)a_{x'}^2 - (auv)a_{x'}^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}p'(-C)\left\{p(-C)(avu)a_{x'}^2 - (avu)a_{x'}^2\right\},$$

während die übrigen Glieder der rechten Seite von (1.) sich nicht ändern, falls man u mit v vertauscht und $-C$ an Stelle von $+C$ setzt. Das bedeutet aber geometrisch, daß der Kegelschnitt, der durch Nullsetzen der rechten Seite von (1.) entsteht, auch durch die Punkte mit den Argumenten

$$V_1 - C;\ V_2 - C;\ V_3 - C$$

hindurchgeht, wenn V_1, V_2, V_3 die Argumente der Schnittpunkte von $v_x = 0$ bedeuten.

Damit ist aber der Charakter der Transformation als einer quadratischen Cremonaschen klargelegt. Als Fundamental-

punkte der Transformation kann man drei Punkte mit den Argumenten

$$V_1 - C;\ V_2 - C;\ V_3 - C$$

wählen, wo V_1, V_2, V_3 die Argumente des Schnittes der Geraden $v_x = 0$ bedeuten. Einer Geraden $u_x = 0$ entspricht vermöge der Transformation ein Kegelschnitt, der durch die Fundamentalpunkte hindurchgeht, und die C_3 überdies in den Punkten

$$U_1 + C;\ U_2 + C;\ U_3 + C$$

schneidet.

Unter den Transformationen „zweiter Art“ gibt es acht lineare, die wir erhalten, wenn wir der Konstanten C die Werte

$$C = \frac{2p\omega_1 + 2q\omega_3}{3} = \frac{\tilde{\omega}}{3}$$

erteilen. Nach dem Abelschen Theorem bilden dann die Fundamentalpunkte

$$V_i - \frac{\tilde{\omega}}{3}\ (i = 1, 2, 3.)$$

den Schnitt einer Geraden, und es entspricht der Geraden $u_x = 0$ durch die Transformation ein Kegelschnitt, der in die beiden Geraden durch die Punkte

$$V_i - \frac{\tilde{\omega}}{3} \text{ und } U_i + \frac{\tilde{\omega}}{3}\ (i = 1, 2, 3.)$$

zerfällt. Vier von diesen acht Transformationen ergeben sich für die Wurzeln p_i der speziellen Dreiteilungsgleichung [1])

$$G(p,-1) = p^4 - Sp^2 + \frac{4}{3}\,Tp - \frac{1}{12}\,S^2 = 0,$$

deren Werte:

$$p_1 = p\left(\frac{2\omega_1}{3}\right);\ p_2 = p\left(\frac{2\omega_3}{3}\right);\ p_3 = p\left(\frac{2\omega_1 + 2\omega_3}{3}\right);$$

$$p_4 = p\left(\frac{2\omega_1 + 4\omega_3}{3}\right)$$

sind. Aus jeder dieser vier Transformationen entsteht eine

[1]) C.-L. p. 655 und 656.

neue, falls man in (1.) das Vorzeichen des letzten Gliedes wechselt:

$$\pm \frac{1}{2} p_i' \left\{ p_i (a\,u\,v) a_{x'}^2 - (a\,u\,v) a_{x'}^2 \right\},$$

denn dieser Zeichenwechsel ist, wie leicht ersichtlich, gleichbedeutend damit, daß wir für C die vier noch übrigen Werte:

$$\frac{4\omega_1}{3};\quad \frac{4\omega_3}{3};\quad \frac{4\omega_1 + 4\omega_3}{3};\quad \frac{4\omega_1 + 2\omega_3}{3}$$

setzen.

§ 7.

Kegelschnitte durch die sechs Punkte $U_i \pm C$ ($\sum_{i=1}^{3} U_i = U_0$).

Besonderes Interesse verdient der Kegelschnitt in Punktkoordinaten, der durch Nullsetzen der rechten Seite von (1.) § 6 entsteht, wenn u mit v zusammenfällt, nämlich:

$$(1.)\qquad 2\left\{ p^2(C)\,\Theta_x^2 u_v^2 - 2\,p(C) H_x^2 u_\eta^2 + K_x^2 u_\zeta^2 \right\} + p'^2(C)\, u_x^2 = 0,$$

und dies ist nach Obigem allgemein die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die Punkte mit den Argumenten

$$U_1 \pm C;\quad U_2 \pm C;\quad U_3 \pm C$$

hindurchgeht, wenn U_1, U_2, U_3 die Argumente der Schnittpunkte von $u_x = 0$ sind.

Fallen die drei Schnittpunkte von $u_x = 0$ zusammen, wird also $u_x = 0$ Wendetangente, so oskuliert offenbar der entsprechende Kegelschnitt die C_3 in zwei Punkten.

Ist ein Wendepunkt $z\,(a_z^3 = 0;\ a_z^3 = 0)$ vorgegeben, so legt man ihm gewöhnlich das Argument $U = 0$ bei. Der Strahl

$$p(C) a_z^2 a_x - a_z^2 a_x = 0$$

durch den Wendepunkt schneidet dann die Punkte mit den Argumenten $\pm C$ aus. Ersetzt man jetzt in (1.) die u_i durch die Koordinaten $a_z^2 a_i$ der Wendetangente, so hat man einen Kegelschnitt, der die C_3 in den Punkten $\pm C$ oskuliert.

Ohne Angabe der Zwischenrechnung sei erwähnt, daß man die linke Seite von (1.) für $u_i = a_z^2 a_i$ symbolisch umformen kann zu [1]: $p(C) = p$.

$$(2.) \qquad \frac{2}{3}\left\{a_z^2 a_x \cdot a_z^2 a_x \cdot \left(3p^2 + \frac{1}{2}S\right) + \frac{1}{2}Sp(a_z^2 a_x)^2 + 3p(a_z^2 a_x)^2 - \frac{4}{\psi_z^6}(\psi_z^5 \psi_x)^2\right\} + p'^2(a_z^2 a_x)^2.$$

Ist dann $p = p\omega_i$ eine Wurzel der speziellen Zweiteilungsgleichung

$$p^3 - \frac{1}{2}Sp + \frac{1}{3}T = 0,$$

so ist

$$p\omega_i a_z^2 a_x - a_z^2 a_x = 0$$

eine der drei Tangenten, die vom Wendepunkte z ausgehen, und es ist ohne weiteres klar, daß der Kegelschnitt, der durch Nullsetzen von (2.) für $p = p\omega_i$ entsteht, die C_3 im Berührungspunkt dieser Tangente fünffach berührt.

Ist endlich $p = p_i$ eine Wurzel der speziellen Dreiteilungsgleichung

$$p^4 - Sp^2 + \frac{4}{3}Tp - \frac{1}{12}S^2 = 0,$$

dann ist

$$p_i a_z^2 a_x - a_z^2 a_x = 0$$

eine der vier Wendepunktslinien, die vom Wendepunkte z ausgehen, und es zerfällt dann der oskulierende Kegelschnitt in zwei Wendetangenten.

In der Tat wird dann (2.) zu:

$$(3.) \qquad \frac{3}{4p_i}\left\{a_z^2 a_x \left(p_i^2 + \frac{1}{6}S\right) + 2p_i a_z^2 a_x\right\}^2 - \frac{4}{\psi_z^6}(\psi_z^5 \psi_x)^2 = 0,$$

wo das Zerfallen klar zutage tritt. —

Gleichung (1.) repräsentiert ganz allgemein ein zweifach unendliches quadratisches Kegelschnittsystem, wenn die Größen u_i die Stelle von Parametern versehen. Durch Variation von C

[1]) Bezüglich der Definition von ψ siehe C.-L. pag. 570.

entstehen immer neue und neue Systeme, unter denen auch für C gleich einer halben Periode

$$C = \omega_1,\ \omega_1 + \omega_3 = \omega_2,\ \omega_3$$

die drei Systeme enthalten sind, deren Kegelschnitte $f = 0$ an drei Stellen berühren, nämlich:

$$p^2\omega_i \Theta_x^2 u_\xi^2 - 2p\omega_i H_x^2 u_\eta^2 + K_x^2 u_\zeta^2 = 0;\ (i = 1, 2, 3.)$$

Von einigem Interesse ist noch die Frage nach den zerfallenden Kegelschnitten der Systeme. In dem zur Konstanten C gehörigen Systeme entspricht der Verbindungslinie der Punkte mit den Argumenten

$$U - C,\ U \text{ bezw. } U,\ U + C$$

ein zerfallender Kegelschnitt. Der dritte Schnittpunkt U' der Verbindungslinie U', $U' + C$ ergibt sich aus dem Abelschen Theorem

$$U' + U' + C + U' = U_0$$

als $$U' \equiv U_0 - 2U - C;$$

der entsprechende Kegelschnitt geht also durch die sechs Punkte:

$$V_1 \equiv U + C;\quad V_4 \equiv U - C;$$
$$V_2 \equiv U + 2C;\ V_5 \equiv U;$$
$$V_3 \equiv U_0 - 2U;\ V_6 \equiv U_0 - 2U - 2C;$$

davon liegen V_1, V_3, V_4 und V_2, V_5, V_6 auf einer Geraden, denn es ist:

$$V_1 + V_3 + V_4 \equiv U_0;$$
$$V_2 + V_5 + V_6 \equiv U_0.$$

Ebenso zerfällt der Kegelschnitt, welcher der Verbindungslinie der Punkte $U - C$ und U entspricht; denn U ist seinerseits dem Punkte $U - C$ geradeso zugeordnet, wie $U + C$ dem Punkte U.

Unter den Fällen $C = \frac{1}{n}\left\{2p\omega_1 + 2q\omega_3\right\}$ ist der Fall $n = 3$ ausgezeichnet. In den Systemen, die dadurch entstehen, daß man p und q konstante, ganzzahlige Werte beilegt, zerfällt jeder Kegelschnitt. Der Geraden $u_x = 0$, mit den Schnittpunkten U_1, U_2, U_3 entspricht ein Kegelschnitt durch die Punkte $(2p\omega_1 + 2q\omega_3 = \tilde{\omega})$:

$$V_1 \equiv U_1 + \frac{\tilde{\omega}}{3};\ V_2 \equiv U_2 + \frac{\tilde{\omega}}{3};\ V_3 \equiv U_3 + \frac{\tilde{\omega}}{3};$$

$$V_4 \equiv U_1 - \frac{\tilde{\omega}}{3};\ V_5 \equiv U_2 - \frac{\tilde{\omega}}{3};\ V_6 \equiv U_3 - \frac{\tilde{\omega}}{3};$$

und zerfällt also in die beiden Geraden:

$$V_1 + V_2 + V_3 \equiv U_o \text{ und } V_4 + V_5 + V_6 \equiv U_o.$$

Die Verbindungslinien der Punktepaare U, $U + C$ umhüllen bekanntlich eine Kurve sechster Klasse, wie bei Clebsch-Lindemann pag. 621 ausführlich erörtert wird. In ihrer Gesamtheit repräsentieren dieselben die Hauptkoinzidenzkurven des Konnexes

$$Q = (abu)^2 (cau)\, c_x^2 b_x.$$

Bei der Vollkommenheit der zur Verfügung stehenden Hilfsmittel bereitet es keine weitere Schwierigkeit, die Gleichung der Enveloppe aufzustellen. Man betrachtet zu diesem Zwecke die Invariante des Kegelschnittes in Punktkoordinaten

$$2\{p^2\Theta - 2pH + K\} + p'^2 u_x^2 = 0;\ p = p(C).$$

Hierfür kann man, da[1])

$$p^2\Theta - 2pH + K = \Theta_{p,-1},$$

noch kürzer schreiben:

$$\Theta_{p,-1} + \frac{1}{2} p'^2 u_x^2 = 0.$$

Die gesuchte Invariante enthält die Linienkoordinaten u_i und stellt gleich Null gesetzt, das Umhüllungsgebilde der Geraden u dar, deren zugehörige Kegelschnitte zerfallen.

Die Invariante eines Kegelschnittes von der Form:

$$a_x^2 + \lambda u_x^2 = 0,$$

wo a_x^2 eine quadratische Form, u_x^2 dagegen das Quadrat einer Linearform u_x ist, wird[2])

$$(aa'a'')^2 + 3\lambda \cdot (aa'u)^2.$$

Demnach erfordert die Aufstellung der gesuchten Invariante nur die Berechnung der beiden Therme:

$$(\Theta\Theta'\Theta'')^2_{p,-1} \text{ und } (\Theta\Theta' u)^2_{p,-1}.$$

---

[1]) C.-L. pag. 558. [2]) C.-L. pag. 291.

Nun ist einerseits, wie wir von früher her wissen (§ 2 (1.))

$$(\Theta\Theta'\Theta'')^2 = (\Theta\Theta'\Theta'')^2 u_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 u_{\vartheta''}^2 = \frac{1}{3}\Sigma^2,$$

andererseits

$$(\Theta\Theta' u)^2 = (\Theta\Theta' u)^2 u_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 = F;\ \text{(C.-L. pag. 543).}$$

Es wird also

$$(\Theta\Theta'\Theta'')^2_{p,-1} = \frac{1}{3}\Sigma^2_{p,-1};$$

$$(\Theta\Theta' u)^2_{p,-1} = F_{p,-1}.$$

Die Invariante stellt sich demnach in der Form dar:

$$(4.)\qquad \frac{1}{3}\Sigma^2_{p,-1} + \frac{3}{2}p'^2 F_{p,-1} = \frac{1}{3}\Sigma^2_{p,-1} + G_1(p,-1)F_{p,-1}.$$

Nun ist:

$$\delta F = \frac{4}{3}\Sigma^2,$$

und

$$(\delta F)_{\varkappa,\lambda} = G_1 \cdot \frac{\partial F_{\varkappa,\lambda}}{\partial \lambda} - G_2 \frac{\partial F_{\varkappa,\lambda}}{\partial \varkappa} = \frac{4}{3}\Sigma^2_{\varkappa,\lambda};\ \text{(C.-L. pag. 560.)}$$

Es ist daher:

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{4}{3}\Sigma^2_{\varkappa,\lambda}\cdot(-\lambda) + 4G_1\cdot F_{\varkappa,\lambda}\right\} = G(\varkappa,\lambda)\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial F_{\varkappa,\lambda}}{\partial \varkappa}.$$

Setzt man $\varkappa = p;\ \lambda = -1$, so wird:

$$(5.)\qquad \frac{1}{3}\Sigma^2_{p,-1} + G_1 F_{p,-1} = \frac{1}{4}G(p,-1)\frac{\partial F_{p,-1}}{\partial p}.$$

Der Faktor von $G(p,-1)$ gleich Null gesetzt gibt die Gleichung der Integralkurven des Konnexes $Q=0$, wie sie Harnack in seinem Aufsatze: „Über ternäre kubische Formen“ (Math. Ann. Bd. 9) gegeben hat. Wir können jetzt den Satz formulieren:

„Ein Kegelschnitt des zur Konstante C gehörigen Systems (1.), wo die u_i Parameter bedeuten, zerfällt, sobald $u_x = 0$ eine Tangente der zur Integrationskonstante C gehörigen Integralkurve des Konnexes

$$Q = (abu)^2(cau)c_x^2 b_x$$

ist, und für jedes $u_x = 0$, wenn p eine Wurzel der speziellen Dreiteilungsgleichung ist“:

$$G(p,-1) = p^4 - Sp^2 + \frac{4}{3}Tp - \frac{S^2}{12} = 0.$$

Harnack gibt das System der Integralkurven des Konnexes $Q = 0$ in der Form an:

$$\frac{\partial F_{\varkappa,\lambda}}{\partial \varkappa} = 0,$$

indem er die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem Parameter $\varkappa$, λ des Kurvensystems und der Integrationskonstante C des Konnexes offen läßt[1]). Diese Frage ist hier in einfacher Weise gelöst, es ist nämlich:

(6.) $$\varkappa = p(C);\ \lambda = -1.$$

§ 8.

Die Transformationen „erster Art".

Die Transformation $U + U' = C$ führt den Punkt y mit dem Argument U, in den Punkt Y mit dem Argument $-U + C$, und Y wieder in y über. Die wesentliche Eigenschaft derselben besteht darin, daß je zwei Punkte y und Y der Kurve, die durch Transformation ineinander übergehen, auf einem Strahl durch einen festen Punkt z der Kurve liegen. Das Argument V desselben ergibt sich aus

$$U + U' + V \equiv U_0$$

mit Rücksicht auf $U + U' \equiv C$, als

$$V \equiv U_0 - C.$$

Drei Punkte z, y, Y, die der Kurve angehören und zugleich auf einer Geraden liegen, verbindet nun immer das Gleichungssystem:

(1.) $$\begin{aligned} (z\,y\,Y) &= 0; \\ a_z a_y a_Y &= 0; \\ a_z a_y a_Y &= 0. \end{aligned}$$

Soll dasselbe für ein Wertesystem von Y bestehen, so muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden, nämlich:

$$\overset{\wedge}{(z\,y\,a\,a)} a_z a_y a_z a_y = a_z^2 a_y \cdot a_z a_y^2 - a_z a_y^2 \cdot a_z^2 a_y$$
$$= \frac{1}{3}(a_z^3 \cdot a_y^3 - a_y^3 \cdot a_z^3);\ \text{(Identität v. Salmon.)}$$

---

[1]) Siehe Harnack: „Über ternäre kubische Formen." Math. Ann. Bd. 9 pag. 238 und 239.

die Determinante verschwindet also, wenn zugleich $a_z^3 = 0$ und $a_y^3 = 0$ ist. D. h. liegen z und y auf der Kurve, so schneiden sich $a_x a_y a_z = 0$ und $a_x a_y a_z = 0$ auf der Verbindungslinie von zy im Punkte Y, und man schließt unschwer weiter, daß auch Y auf der Kurve liegt.

Aus (1.) ergibt sich die Gleichung des Punktes Y auf dreierlei Weise:

$$\sigma u_Y = (u a \hat{z} y) a_z a_y;$$

(2.)
$$\sigma' u_Y = (u a \hat{z} y) a_z a_y;$$

$$\sigma'' u_Y = (u a a) a_z a_y a_z a_y.$$

Hier stellen die rechten Seiten bei variabelem y drei Kegelschnitte dar, die gemeinsam auf der Kurve drei Punkte ausschneiden, in welchen die Strahlen von z nach den Schnittpunkten von $u_Y = 0$ die C_3 treffen. Jeder einzelne Kegelschnitt schneidet die C_3 noch in drei weiteren Punkten, die von u nicht abhängen. Wir bekommen also für variabele u drei Netze von Kegelschnitten, jedes durch drei feste Punkte, die ebenfalls der C_3 angehören.

Bezüglich der Grundpunkte dieser Netze ist folgendes zu sagen: Die Kegelschnitte $(u a \hat{z} y) a_z a_y = 0$ oskulieren die C_3 im Punkte z. $(u a \hat{z} y) a_z a_y = 0$ geht durch den Punkt z, die beiden letzten Schnittpunkte mit der C_3 verbindet die vom Tangentialpunkt von z ausgehende Gerade $a_z^2 a_y = 0$; endlich $(u a a) a_z a_y a_z a_y = 0$ schneidet die C_3 in drei Punkten, die mit z den gleichen Tangentialpunkt haben.

Die Formeln (2.) repräsentieren also drei quadratische Transformationen, mit Fundamentalpunkten, die auf der C_3 liegen. Aus dem Gleichungssystem (1.), das zur Herleitung der Transformationen dient, folgt ihre Eigenschaft, die C_3 in sich selbst überzuführen, und zwar in der Weise, daß je zwei Punkte, die auf einem Strahl durch z liegen, ineinander übergehen.

Die Untersuchung des Kegelschnittes, der durch Nullsetzen von $(u\hat{a}xy)a_z a_y$ entsteht, führt man nach Salmon[1]) auf folgende Weise:

Zufolge der Salmonschen Identität:

$$3\,(a_z a_y^2 \cdot a_z^2 a_y - a_z^2 a_y \cdot a_z a_y^2) = a_y^3 \cdot a_z^3 - a_z^3 \cdot a_y^3;$$

kann die Gleichung der Kurve $a_y^3 = 0$ für einen ihrer Punkte ($a_z^3 = 0$) in der Form geschrieben werden:

$$a_z a_y^2 \cdot a_z^2 a_y - a_z^2 a_y \cdot a_z a_y^2 = 0.$$

Die Gleichung eines die C_3 in z berührenden Kegelschnittes ist nun:

$$\lambda a_z a_y^2 - u_y \cdot a_z^2 a_y = 0.$$

„Mit Benutzung der Identität kann man die Gleichung der Kurve $a_y^3 = 0$ in die Form schreiben:

$$a_z^2 a_y \{\lambda a_z a_y^2 - u_y \cdot a_z^2 a_y\} = a_z^2 a_y \{\lambda a_z a_y^2 - u_y \cdot a_z^2 a_y\},$$

aus welcher man erkennt, daß die vier Punkte, in welchen der berührende Kegelschnitt

$$\lambda a_z a_y^2 - u_y \cdot a_z^2 a_y = 0$$

die Kurve ferner schneidet, seine Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte:

$$\lambda a_z a_y^2 - u_y \cdot a_z^2 a_y = 0$$

sind, so daß, wenn dieser letzte Kegelschnitt durch den Punkt z geht, der erste drei aufeinander folgende Punkte der Kurve dritter Ordnung enthält.“

Substituiert man z für y, so erhält man als Bedingung dafür, daß der Kegelschnitt $\lambda a_z a_y^2 - u_y \cdot a_z^2 a_y = 0$ durch den Punkt z geht,

$$\lambda = u_z.$$

$$u_z \cdot a_z a_y^2 - u_y \cdot a_z^2 a_y = (u\hat{a}zy)a_z a_y = 0$$

oskuliert somit die C_3 im Punkte z.

Weiter erhellt aus (3.) sofort, daß die beiden letzten Schnittpunkte des Kegelschnittes

$$u_z a_z a_y^2 - u_y \cdot a_z^2 a_y = 0$$

mit der Kurve, seine Durchschnittspunkte mit $a_z^2 a_y = 0$ sind.

[1]) Salmon: „Höhere Kurven“. Art. 237.

Was endlich die drei von u unabhängigen Schnittpunkte von

$$(uaa)a_z a_y a_z a_y = 0$$

betrifft, so ist zu beachten, daß für die Punkte y, die mit z den gleichen Tangentialpunkt haben

$$(aa)_i a_z a_y a_z a_y = 0$$

ist, da in diesem Falle $a_z a_y a_i$ zu $a_z a_y a_i$ proportional ist; denn für ein Polepaar z, y der C_3 gelten ja die drei Relationen:

$$p\omega_i \; a_z a_y a_i - a_z a_y a_i = 0,$$

woraus diese Eigenschaft sofort erhellt. Der Kegelschnitt $(uaa)a_z a_y a_z a_y = 0$ geht somit ganz unabhängig von u durch die drei Pole des Punktes z.

Einen wichtigen Spezialfall für die Transformationen (2.) bedeutet es, wenn z in einen Wendepunkt fällt:

$$a_z^3 = 0; \; a_z^3 = 0.$$

Dann zerfällt $a_z a_y^2 = 0$ in die Wendetangente $a_z^2 a_y = 0$ und in die harmonische Gerade des Wendepunktes

$$\psi_z^5 \psi_y = 0.^1)$$

---

[1]) Daß $\psi_z^5 \psi_y = 0$ die harmonische Gerade darstellt, wird aus folgendem klar. Der Strahl $p(C)a_z^2 a_y - a_z^2 a_y = 0$ schneidet $a_y^3 = 0$ in den beiden Punkten

$$\varrho u_y = -4u_m + 4u_l p(C) \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\, u_n p'(C). \quad \text{(C.-L. pag. 653 (75).)}$$

Die Berührungspunkte der drei vom Wendepunkt z ausgehenden Tangenten sind also gegeben durch:

$$\varrho u_y = -4u_m + 4u_l p\omega_i; \; (\omega_i \text{ halbe Periode.})$$

d. h. sie liegen auf der Verbindungslinie der Punkte L und M; bekanntlich verbindet aber die harmonische Gerade die Berührungspunkte; es folgt also, daß L und M Punkte der harmonischen Geraden sind.

Da nun $a_z a_y^2$ und $a_z a_y^2$ in bekannter Weise zerfallen, so ist nach dem Vorhergehenden klar, daß sowohl $a_z a_m a_y = 0$, wie auch $a_z a_m a_y = 0$ die harmonische Polare darstellt. Vergleicht man hiermit die Relation:

$$2\psi_z^5 \psi_y = a_z a_m a_y - a_z a_l a_y, \text{ (C.-L. pag. 639 (32).)}$$

so erkennt man, daß $\psi_z^5 \psi_y = 0$ die harmonische Gerade des Wendepunktes z darstellt.

Es wird jetzt [1]):

$$a_z a_y^2 = \frac{2}{\psi}\, \psi_z^5 \psi_y \cdot a_z^2 a_y;$$

eingesetzt in die erste der Formeln (2.) gibt:

$$\sigma u_Y = a_z^2 a_y \left\{ u_z \cdot \frac{2}{\psi}\, \psi_z^5 \psi_y - u_y \right\};$$

oder

$$\sigma' u_Y = 2 u_z \cdot \psi_z^5 \psi_y - \psi_z^6 \cdot u_y.$$

Wir haben hier eine der neun Kollineationen der zweiten Reihe von Transformationen.

Die Transformationen (2.), deren innerer Zusammenhang nicht ohne weiteres zutage tritt, lassen sich noch unter einem allgemeinen Gesichtspunkt zusammenfassen.

Projiziert man von einem Punkte (Argument W) aus die Schnittpunkte einer Geraden, deren Argumente U_1, U_2, U_3 die Relation

$$U_1 + U_2 + U_3 \equiv U_o$$

verbindet, auf die Kurve, so schneiden die projizierenden Strahlen drei Punkte U_i' aus und es ist:

$$W + U_i + U_i' \equiv U_o,$$

also

$$3W + \Sigma U_i' \equiv 2 U_o.$$

Diese Relation sagt aus, daß jeder Kegelschnitt des Netzes durch drei Punkte der Kurve, deren Argumentsumme zu $3W$ kongruent ist, die Kurve noch in drei Punkten schneidet, die durch Projektion des Schnittes einer Geraden von W aus entstanden sind.

Will man daher die zum Punkte des Argumentes W gehörige Transformation

$$U + U' \equiv U_o - W$$

durch eine quadratische Verwandtschaft in der Ebene hervorrufen, so kann man jedes Tripel von Punkten, dessen Argument-

---

[1]) Es ist zunächst $\psi_z^6 a_z a_y^2 = C a_z^2 a_y \cdot \psi_z^5 \psi_y$; C Zahlenfaktor.

$$2 \psi_z^6 a_z a_y a_x = C \left\{ a_z^2 a_x \psi_z^5 \psi_y + a_z^2 a_y \cdot \psi_z^5 \psi_x \right\};$$

für $y = z$ wird $2 \psi_z^6 a_z^2 a_x = C \psi_z^6 a_z^2 a_x$; also $C = 2$.

summe zu $3W$ kongruent ist, als Fundamentalpunkte der Transformation wählen. Die Formeln (2.), welche die zum Punkte z gehörige Transformation der Kurve in sich vermitteln, reihen sich hier ein; denn die Fundamentalpunkte dieser drei quadratischen Transformationen bilden drei Punktgruppen, welche zu dem dreifach zählenden Punkt z korresidual sind.

Sucht man nach einem analytischen Ansatz für die Transformation $U + U' \equiv U_0 - W$, der die ∞^2 quadratischen Verwandtschaften umfaßt, die allen möglichen Tripeln von Fundamentalpunkten entsprechen, will man insbesondere ein Analogon zu dem Ausdrucke (1.) § 6 für die Transformation „zweiter Art", so wird man zunächst untersuchen, ob man die Tripel von Fundamentalpunkten durch Projektion der Geraden von einem bestimmten Punkte der Kurve aus erhalten kann. Dabei ist zu beachten, daß der dreifach zählende Punkt W, der ebenfalls ein Tripel darstellt, nur durch Projektion des Schnittes einer Wendetangente entstehen kann. Verbindet man daher W mit einem Wendepunkt, so muß die Verbindungslinie die Kurve in einem Projektionszentrum treffen, und es ist nach dem „Restsatz" klar, daß Strahlen von dem Zentrum nach den Schnittpunkten einer Geraden auf der Kurve ein Tripel von Fundamentalpunkten ausschneiden [1]).

Vermöge der Transformation $U + U' \equiv C$ entsprechen den Schnittpunkten der Geraden $\sum_1^3 U_i \equiv U_0$ drei Punkte

$$U_i' \equiv -U_i + C;$$

verbindet man nun den Punkt $W \equiv U_0 - C$ mit einem Wende-

[1]) Entsprechend den neun Wendepunkten gibt es neun Zentren. Verbindet man W mit den beiden Wendepunkten $\frac{U_0}{3}$ und $\frac{U_0}{3} + \frac{2p\omega_1 + 2q\omega_3}{3}$, so schneiden die Verbindungslinien zwei derselben aus. Projiziert man von dem ersten Zentrum aus die Gerade mit den Schnittpunkten $V_i \equiv -\frac{2p\omega_1 + 2q\omega_3}{3}$, von dem zweiten aus die Gerade $\sum V_i \equiv U_0$, so entsteht in beiden Fällen das gleiche Tripel von Fundamentalpunkten.

punkt $\frac{U_o}{3} + \frac{2p\omega_1 + 2q\omega_3}{3}$ und projiziert von dem Schnittpunkte der Verbindungslinie die Schnittpunkte V_i der Geraden $\sum_1^3 V_i = U_o$, so schneiden die projizierenden Strahlen drei Punkte

$$V_i' \equiv -V_i - C + \frac{4U_o}{3} - \frac{2p\omega_1 + 2q\omega_3}{3}$$

aus, und es ist

$$\sum_1^3 U_i' + \sum_1^3 V_i' \equiv 2U_o.$$

Für den Fall $U_o = 0$, $p = 0$, $q = 0$ kann man sich die Gleichung des Kegelschnittes durch die sechs Punkte

$$U_i' \equiv -U_i + C;\ V_i' \equiv -V_i - C\ (\sum_1^3 U_i \equiv 0;\ \sum_1^3 V_i \equiv 0.)$$

leicht verschaffen und so einen allgemeinen analytischen Ansatz für die Transformation $U + U' = C$ gewinnen. Zu dem Ende betrachtet man wieder die Transformation (vgl. (1.) § 6):

I. $$\sigma u_{x'} = p^2(C)\Theta^2_{x'} u_\vartheta v_\vartheta - 2p(C)H^2_{x'} u_\eta v_\eta + K^2_{x'} u_\varkappa v_\varkappa$$
$$+ \frac{1}{2} p'^2(C) u_{x'} v_{x'} + p'(C)\{p(C)(auv)a^2_{x'} - (auv)\alpha^2_{x'}\}.$$

Hier stellt die rechte Seite in den Veränderlichen x' einen Kegelschnitt durch die sechs Punkte

$$U_i - C;\ V_i + C;\ (i = 1, 2, 3.)$$

dar. Mit (I.) kombinieren wir die lineare Transformation (4.)

II. $$\sigma' u_{x'} = 2u_z \psi^5_z \psi_y - \psi^6_z u_y;$$

also

$$\sigma' x_i' = 2x_i \psi^5_z \psi_y - \psi^6_z y_i.$$

Kommt hier dem Wendepunkt z das Argument Null zu, so kann man sagen, die Transformation II führt den Punkt mit dem Argument U in den Punkt $-U$ über. Wenden wir daher auf die rechte Seite von I die Transformation II an, so stellt sie in den neuen Veränderlichen y einen Kegelschnitt durch die sechs Punkte

$$-U_i + C \text{ und } -V_i - C$$

dar, also den gesuchten Kegelschnitt. Das Resultat des Ein-

setzens ist somit ein allgemeiner analytischer Ansatz für die Transformation $U + U' \equiv C$.

Es erübrigt noch, auf die Stellung hinzuweisen, welche die Formeln (2.) unter den ∞^2 quadratischen Transformationen einnehmen, die alle die Transformation $U + U' \equiv C$ leisten.

Unterscheidet man bei derselben eine Ebene der Punkte U und eine Ebene der Punkte U', so kann man als Fundamentalpunkte der U'-Ebene die Punkte

$$-V_i - C \left(\sum_{i=1}^{3} V_i \equiv 0\right)$$

wählen, wie im vorhergehenden ausführlich dargelegt wurde, muß dann aber als Fundamentalpunkte der U-Ebene die Punkte

$$+V_i - C$$

gelten lassen. Davon überzeugt man sich so: Eine Gerade der U-Ebene wird transformiert in einen Kegelschnitt durch die Fundamentalpunkte $-V_i - C$ der U'-Ebene. Geht nun die Gerade durch einen Fundamentalpunkt der U-Ebene, z. B. durch $+V_1 - C$,

und ist $$V_1 - C + W \equiv 0,$$

wo W die Summe der Argumente der beiden anderen Schnittpunkte bedeutet, so spaltet sich aus der Gleichung des durch die Transformation entstehenden Kegelschnittes die Verbindungslinie der Punkte

$$-V_2 - C;\ -V_3 - C$$

ab, und es bleibt eine Gerade durch den Fundamentalpunkt $-V_1 - C$; dann ist, wenn wieder W' die Summe der Argumente ihrer beiden letzten Schnittpunkte bedeutet

$$-V_1 - C + W' \equiv 0;$$

also

$$W' \equiv V_1 + C \equiv -W + 2C;$$

wie es sein muß.

Fallen dann die Fundamentalpunkte der beiden Ebenen zusammen, so ist

$$+V_i - C \equiv -V_k - C;\ (i, k = 1, 2, 3.)$$

Es sind hier drei Fälle möglich; entweder es ist:

$$V_1 \equiv -V_1;\ V_2 \equiv -V_3;\ V_3 \equiv -V_2;$$

dies führt wegen $\Sigma V_i \equiv 0$ zur Bedingung:

$$V_1 \equiv 0;\ V_2 \equiv -V_3;$$

d. h. wählt man als Hilfslinie $\sum_1^3 V_i \equiv 0$ eine Gerade durch den Wendepunkt, so fallen bei der entsprechenden Transformation die Fundamentalpunkte der beiden Ebenen zusammen. Bei der Transformation $U + U' \equiv C$ liegen immer zwei Punkte, die ineinander übergehen, auf einer Geraden durch den festen Punkt $V \equiv -C$; wegen

$$U + U' + V \equiv C + V \equiv 0.$$

Bezeichnet man diesen Punkt $-C$ wieder mit x, so ist leicht zu übersehen, daß man hier die Transformationen

$$\varrho u_Y = \varkappa \overset{\wedge}{(u a x y)} a_z a_y - \lambda \overset{\wedge}{(u a x y)} a_z a_y \qquad (5.)$$

vor sich hat, wo $\varkappa, \lambda$ einen willkürlichen Parameter bedeutet.

Der zweite Fall

$$V_1 \equiv -V_2;\ V_2 \equiv -V_3;\ V_3 \equiv -V_1$$

ist identisch mit dem dritten Fall:

$$V_i \equiv -V_i;\ \text{oder } 2V_i \equiv 0,$$

hieraus

$$V_i \equiv 0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3.$$

Die hinzutretende Bedingung $\sum_1^3 V_i \equiv 0$ erlaubt fünf Lösungen:

$$V_1 \equiv 0,\ 0,\ \omega_1;$$
$$V_2 \equiv 0,\ \omega_i,\ \omega_2;$$
$$V_3 \equiv 0,\ \omega_i,\ \omega_3.$$

Den vier ersten Lösungen gehören die Transformationen zu:

$$\sigma u_Y = \overset{\wedge}{(u a x y)} a_z a_y;$$

$$\varrho u_Y = p\,\omega_i \overset{\wedge}{(u a x y)} a_z a_y - \overset{\wedge}{(u a x y)} a_z a_y,\ (i = 1, 2, 3.) \qquad (6.)$$

die schon unter (5.) enthalten sind. Die letzte Lösung führt zu einer Transformation, deren Fundamentalpunkte die Pole

$$-C+\omega_1;\ -C+\omega_2;\ C+\omega_3$$

des Punktes $-C$ sind. Es ist dies:

$$\sigma'' u_Y = (u\,a\,a)a_z a_y a_z a_y.$$

Alle diese quadratischen Transformationen mit gemeinsamem Fundamentaldreieck der y-Ebene und Y-Ebene sind ohne weiteres auch umkehrbar. Es gibt also unter den ∞^2 Ansätzen, die alle die Transformation $U+U' \equiv C$ leisten, einfach unendlich viele, bei denen man y mit Y vertauschen darf; sie sind erschöpft durch die Ansätze:

$$\varrho u_Y = \varkappa(u\,a\,\hat{z}\hat{y})a_z a_y - \lambda(u\,a\,\hat{z}\hat{y})a_z a_y;$$
$$\sigma'' u_Y = (u\,a\,a)a_z a_y a_z a_y.$$

Daß die Transformationen (2.) direkt umkehrbar sind, folgt auch unmittelbar aus dem in z, y, Y symmetrischen Gleichungssystem (1.), das zu ihrer Herleitung dient.

Lebenslauf.

Ich, Albert Geus, bayerischer Staatsangehörigkeit und katholischer Konfession, bin am 9. November 1885 zu Lichtenfels geboren, als Sohn des Postoberpackmeisters Johann Geus und seiner Ehefrau Johanna, geb. Stumpf. Ich besuchte zu Nürnberg, Hof und Lichtenfels vier Jahre die Volksschule und machte 1896 die Aufnahmeprüfung in die zweite Klasse des humanistischen Neuen Gymnasiums Bamberg, das ich im Juli 1904 absolvierte. Hierauf hörte ich ein Semester philosophische Vorlesungen am K. Lyzeum Bamberg und oblag dann dem Studium der Mathematik und Physik, und zwar fünf Semester an der Universität München, drei Semester an der Universität Erlangen. Nach bestandenem Lehramtsexamen (Herbst 1908) befaßte ich mich mit der Ausführung der vorliegenden Arbeit. Ich besuchte die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren und Dozenten: Doehlemann, Graetz, Lindemann, Roentgen, Voß, v. Weber, Muthmann, Giesenhagen, Hertmann in München; Gordan, Noether, Wiedemann, Reiger, Hilb, Roemer, Solereder in Erlangen; Dürrwächter, Haas, Heß, Ries am K. Lyzeum Bamberg.